

基于小波域分形编码的图像插值

孙冬明 吴先良

(安徽大学电子科学与技术学院, 合肥 230039)

摘要 传统的图像插值方案(包括最近邻插值、双线性插值和B样条插值等),大多是基于图像分块的光滑连续模型。由于该模型不能很好地描述自然图像的特点,因此插值得到的图像质量不高。为寻求更有效的插值方案,首次提出了基于小波域分形编码的插值算法。该算法在FW编码的基础上,首先利用图像的局部自相似模型,通过小波树的膨胀,并借助小波域的第1级子带,对超分辨率的第0级子带进行最优预测,再经过小波反变换来获得插值图像。标准测试图像的实验表明,该插值算法与传统的双线性插值相比,不仅可以获得清晰的纹理和边缘,而且峰值信噪比也更高,因此插值得到的图像更加精确、真实。

关键词 图像插值 分形 小波

中图分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2007)12-2063-05

Image Interpolation Using Wavelet-fractal Coding

SUN Dong, MING Jun, WU Xian-liang

(Anhui University Electronic Science and Technical Collage, Hefei 230039)

Abstract The traditional image interpolation involving zeroth-order, bilinear, and cubic spline interpolation mostly depends on a piece-wise continuous and smooth modeling of image. In view of the ability to capture the feature of natural image connected with the modeling, the quality of interpolated image is not desirable. A new interpolation algorithm based on the wavelet-fractal(FW) coding is proposed with more efficient interpolation strategy. By the aid of the local self-similarity modeling of image, the new interpolation algorithm using FW coding is implemented by the dilation of tree wavelet. The super-resolution zeroth subband is optimized predicted by the first subband in the wavelet domain. And then the interpolated image can be obtained by the inverse wavelet transform. The experiments of the standard images suggest that the new algorithm can obtain distinct texture and edge of the images and higher peak signal-to-noise ratio(PSNR) compared with the traditional bilinear strategy. As a result, the image interpolated by the new algorithm is accurate and real.

Keywords image interpolation, fractal, wavelet

1 引言

插值是图像处理中的一个基本问题。根据香农采样定理,对于一个有限带宽的图像,当采样间隔小于奈奎斯特间隔时,用Sinc函数进行内插就可以恢复出原始的连续图像。由于Sinc函数物理上不可实现,于是一些学者提出了利用有限宽度的插值函数来逼近Sinc函数,从而产生了最近邻、双线性及B

样条插值等一系列经典的插值算法。它们可以在图像的空域中或其变换域中进行插值。总体上看,这些算法虽实现简单,但插值得到的图像质量不高,因为它们把待插的图像数据看成是连续光滑的。

近年来,随着分形理论的不完善与成熟,一类基于图像的分形布朗运动模型^[1](fractal Brown motion,FBM)的插值方案逐渐成为研究的热点^[2]。由于FBM模型更真实地描述了自然图像的特点,因此与传统的插值方案相比,这类方案插值后的图像

基金项目:安徽省教育厅重点项目(2006KJ014A);安徽省科技厅自然科学基金项目(01042105)

收稿日期:2005-10-08;改回日期:2006-10-10

第一作者简介:孙冬(1983~),男,2006年7月毕业于安徽大学电子科学与技术学院获工学硕士学位,现工作于安徽大学现代教育技术中心。主要从事遥感图像处理、Web服务软件开发工作。E-mail: sundong@ahu.edu.cn

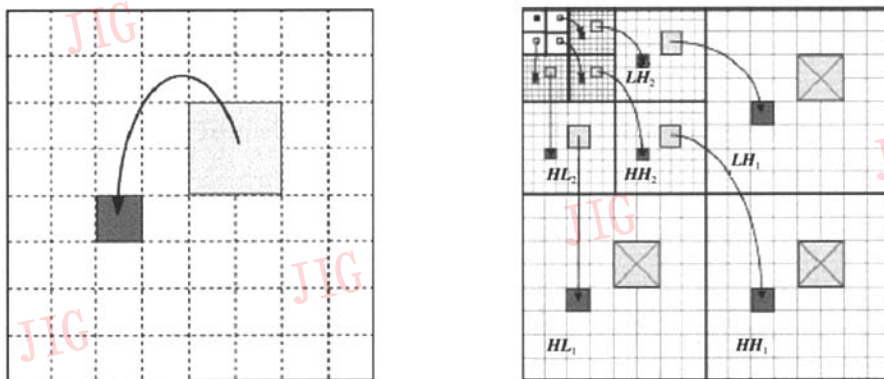
具有较好的细节视觉效果和峰值信噪比,但图像的细节 Hausdorff 分维数的自动计算是一个难点。本文将从图像的另一分形模型——局部自相似模型^[3]出发,以图像的小波域分形(fractal-wavelet, FW)编码^[4]为基础,提出了一种新的插值方案。

2 小波域分形编码原理

Barnsley 认为,自然界的图像具有局部自相似性,Jaquin 根据这一假设,把图像描述成一个带灰度映射的局部迭代函数系统(local iterated function system with gray level maps, LIFSM)的吸引子。文献[3]、[5]中给出了 LIFSM 的编码原理,它首先把图

像分割成若干不重叠的块,然后为每个块寻找一个与其相似的父块及对应的映射关系。

由于空域中大小为 $2^j \times 2^j$ 块的交流成分,其在小波域中可近似地对应为根在第 J 级子带上的小波树 $S^{(j)}$,因此,当空域中的两个块具有相似性时,则它们在小波域中所对应的树的各级数据之间也具有相似性(参见图 1),并且这种相似性是一致的。Davis 根据这一原理,把 LIFSM 编码技术引入到小波域,提出了 FW 编码算法。他把空域中块的相似性,用小波域中树的相似性来近似等价。与 LIFSM 编码相比,FW 编码算法在提高解码图像质量的同时,极大地缩短了编码时间,而且平均码长也更短。



(a) 空域中具有相似性的块

(b) 小波域中具有相似性的树
(每棵树由 3 个方向的分支组成)

图 1 自相似性

Fig. 1 The self-similarity

对图像做 J 级小波变换。设 $S_{m,n}^{(j)}$ 是根在第 J 级子带中 (m,n) 处的树,FW 编码器的任务是为每棵树 $S_{m,n}^{(j)}$ 找出一棵根在第 $J+1$ 级子带中 (u,v) 处的父树 $S_{u,v}^{(j+1)}$,并使得 $S_{u,v}^{(j+1)}$ 在收缩变换 \mathcal{S} 、仿射变换 $L_{m,n}$ 及对比度变换 $g_{m,n}$ 下,与 $S_{m,n}^{(j)}$ 在均方误差(MSE)意义下误差最小,也即

$$e = \|S_{m,n}^{(j)} - g_{m,n} \cdot L_{m,n}(\mathcal{S}(S_{u,v}^{(j+1)}))\|_2 \quad (1)$$

取最小值。

当树 $S_{m,n}^{(j)}$ 和 $S_{u,v}^{(j+1)}$ 充分相似时,则二者之间的误差 e 近似为 0。此时式(1)可写为

$$S_{m,n}^{(j,j_1)} \approx g_{m,n} \cdot L_{m,n}(\mathcal{S}(S_{u,v}^{(j+1,j_2)})) \quad (2)$$

其中, $j_1 = 1, 2, \dots, J$; $j_2 = j_1 + 1$ 。 $S_{m,n}^{(j,j)}$ 代表树 $S_{m,n}^{(j)}$ 在第 j 级子带上的数据,它由 3 个 $2^{j-j} \times 2^{j-j}$ 的数据块组成。

\mathcal{S} 为收缩算子,它可使树损失掉第 1 级子带上 3 个高频方向的数据,也即下降一级分辨率。若省略位置下标,收缩算子 \mathcal{S} 满足

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(S^{(j+1)}) &= \mathcal{S}(S^{(j+1,1)} \cup S^{(j+1,2)} \dots \cup S^{(j+1,J)}) \\ &= S^{(j+1,2)} \cup S^{(j+1,3)} \dots \cup S^{(j+1,J)} \end{aligned} \quad (3)$$

式中, \cup 表示两棵树的数据集合的并运算, $g_{m,n}$ 为对比度变换因子,其定义为

$$g_{m,n} = \frac{\text{cov}(\mathcal{S}(S_{u,v}^{(j+1)}), S_{m,n}^{(j)})}{\sum (A(S_{u,v}^{(j+1)}))^2} \quad (4)$$

其中, cov 为求协方差运算。

$L_{m,n}$ 为仿射变换,它用于对树上的数据进行逐层的变换,并且限定为图 2 所示的 8 种特殊变换。关于这 8 种特殊仿射变换的详细介绍可参阅文献[6]、[7]。

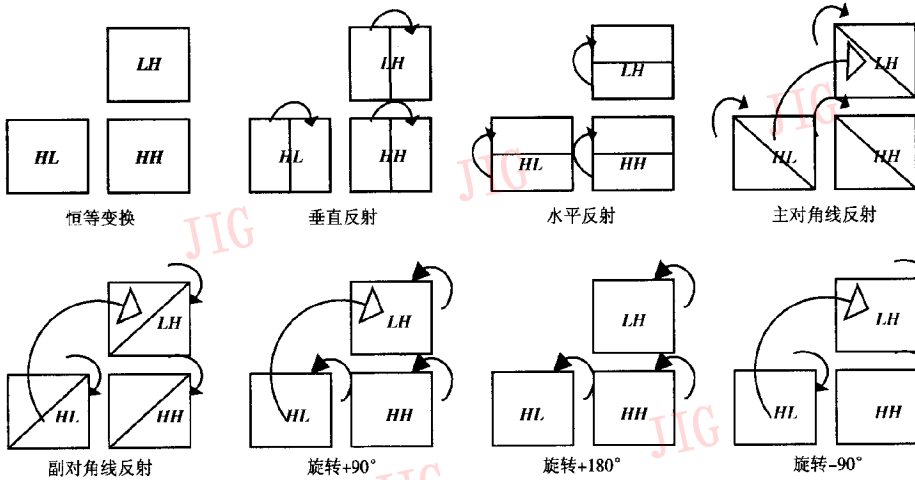


图 2 8 种仿射变换

Fig. 2 Eight affine mappings

FW 的解码是逐级迭代完成的。由于根在第 $J+1$ 级子带中 (u, v) 处的父树 $S_{u,v}^{(J+1)}$ 与根在第 J 级子带中 (m, n) 处的子树 $S_{m,n}^{(J)}$ 具有相似性,因此可以仅使用 $S_{u,v}^{(J+1)}$ 的根数据 $S_{u,v}^{(J+1,J+1)}$ 和这两棵树之间的相似关系(由向量 (u, v) 、 $L_{m,n}$ 、 $g_{m,n}$ 所确定)来恢复子树根数据,若使用式(5)从父树中恢复子树数据

$$S_{m,n}^{(J)} \approx g_{m,n} \cdot L_{m,n}(\mathcal{S}(S_{u,v}^{(J+1)})) \quad (5)$$

则 J 次迭代后,解码完成。解码过程如图 3 所示。

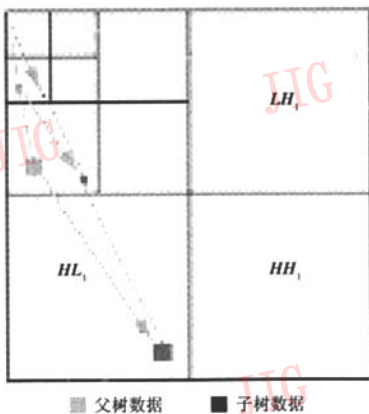


图 3 FW 解码

Fig. 3 FW decoding

对树 $S_{m,n}^{(J)}$ 的存储可以用其 FW 码的 4 维向量 $C_{m,n} = \{(u, v), L_{m,n}, g_{m,n}\}$ 的存储来近似,这就是小波域分形编码的原理。

3 插值算法

从小波域上看,插值的实质是从已知的子带 $\{\Psi_{HL}^j, \Psi_{LH}^j, \Psi_{HH}^j | j=1, 2, \dots, N\}$ 来估计超分辨率级未知的第 0 级子带 $\{\Psi_{HL}^0, \Psi_{LH}^0, \Psi_{HH}^0\}$ 的过程 (Ψ_{HL}^j 、 Ψ_{LH}^j 和 Ψ_{HH}^j 分别代表第 j 级子带的 HL、LH 和 HH 方向上的系数集)。因为空域中块的相似性不会因分辨率的升高而改变,所以,在收缩变换 \mathcal{S} 、仿射变换 $L_{m,n}$ 和对比度变换 $g_{m,n}$ 下相似的两棵树 $S_{u,v}^{(J+1)}$ 和 $S_{m,n}^{(J)}$,它们沿更精细的方向上膨胀一个尺度后,其相似性保持不变。

定义树的膨胀算子 ϑ ,它用于使树生长出更精细层的 3 个高频方向的数据块,也即提升一级分辨率。若省略位置下标,则膨胀算子 ϑ 满足

$$\begin{aligned} \vartheta(S^{(J+1)}) &= \vartheta(S^{(J+1,1)} \cup S^{(J+1,2)} \dots \cup S^{(J+1,J)}) \\ &= S^{(J+1,0)} \cup S^{(J+1,1)} \dots \cup S^{(J+1,J)} \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $S^{(J+1,0)}$ 为树 $S^{(J+1)}$ 在第 0 层上的超分辨率数据,它由 3 个 $2^j \times 2^j$ 大小的数据块组成。

若用 $\vartheta(S_{m,n}^{(J)})$ 和 $\vartheta(S_{u,v}^{(J+1)})$ 分别替换式(2)中的 $S_{m,n}^{(J)}$ 和 $S_{u,v}^{(J+1)}$,则有

$$\vartheta(S_{m,n}^{(J)}) \approx g_{m,n} \cdot L_{m,n}(\mathcal{S}(\vartheta(S_{u,v}^{(J+1)}))) \quad (7)$$

因为膨胀算子 ϑ 和收缩算子 \mathcal{S} 互为逆运算,所以

$$\vartheta(S_{m,n}^{(J)}) \approx g_{m,n} \cdot L_{m,n}(S_{u,v}^{(J+1)}) \quad (8)$$

父树 $S_{u,v}^{(J+1)}$ 的“叶”数据 $S_{u,v}^{(J+1,1)}$ 在第 1 级子带上,而膨胀后的子树 $\vartheta(S_{m,n}^{(J)})$ 的“叶”数据在第 0 级子带上,因此使用式(8)即可由父树的“叶”数据对第 0 级

子带进行估计。当第 0 级子带数据全部计算完毕后,再做小波逆变换,即可得出插值后的高分辨率图像。

综上所述,基本的插值步骤可总结如下:

- (1) 对原始图像进行小波变换;
- (2) 为根在第 J 层子带上的每棵树 $S_{m,n}^{(J)}$:
 - ① 寻找一棵根在第 $J+1$ 级子带上的父树 $S_{u,v}^{(J+1)}$,并使它们在式(1)的定义下误差最小。记录树 $S_{m,n}^{(J)}$ 所对应的 FW 码 $C_{m,n} = \{(u,v), L_{m,n}, g_{m,n}\}$;
 - ② 将树 $S_{m,n}^{(J)}$ 和 $S_{u,v}^{(J+1)}$ 向超分辨率级分辨率方向上进行膨胀,得到新的树 $\vartheta(S_{m,n}^{(J)})$ 和 $\vartheta(S_{u,v}^{(J+1)})$;
 - ③ 根据树 $S_{m,n}^{(J)}$ 的 FW 码,按式(8)计算出树 $\vartheta(S_{m,n}^{(J)})$ “叶”数据的估计值;
- (3) 进行小波逆变换,即可得出高分辨率图像。插值步骤如图 4 虚线部分所示。

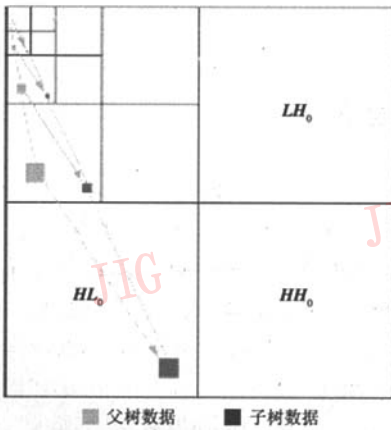


图 4 基于 FW 解码的插值

Fig. 4 FW-decoding based image interpolation

插值的精确性与图像自身的局部自相似程度有关。一般地,局部自相似程度越高,FW 编码对图像的损伤便越小,式(8)的近似计算也会越准确,因此插值出的图像会越真实,甚至可达到原图像的超分辨率图像。不过在绝大多数情况下,插值都仅仅是对更高分辨率图像的一个近似的估计。

由于图像高频系数的误差往往会带来 Gibbs 效应,从而产生较为严重的视觉质量退化,这也是变换域图像插值算法普遍存在的问题。为了抑制 Gibbs 效应,本文使用 cycle-spinning 技术^[8]对插值算法进行改进。完整的插值算法流程如图 5 所示,插值公式可总结为

$$\hat{I} = \frac{1}{2^{2J}} \sum_{a=0}^{2^J-1} \sum_{b=0}^{2^J-1} T(\phi(T(I, a, b)), -2a, -2b) \quad (9)$$

其中, I 为待插图像, \hat{I} 为插值结果图像,算子 ϕ 表示对原图像 I 进行基本 FW 插值操作, $T(I, a, b)$ 表示将图像 I 分别在行、列两个方向上循环移动 a 和 b 个像素。

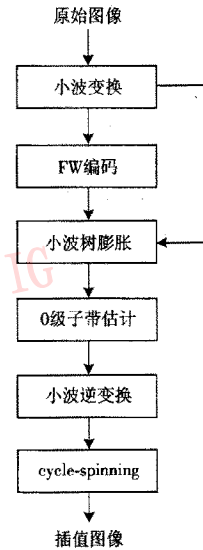


图 5 FW 插值算法流程

Fig. 5 The flow chart of FW interpolation algorithm

4 实验

为验证本文算法的插值效果,利用一幅标准测试图像,对两种插值方式进行了实验对比。图 6 给出了 512×512 大小的标准测试图像“Goldhill”在分别使用双线性插值算法和 FW 插值算法插值后的图像(插值倍数: 4×4)。

与经典的双线性插值算法相比,FW 插值算法能够更为真实地再现出图像的细节(如屋檐、电线、窗户等),并具有比传统的双线性插值算法更好的主观图像质量。作为客观质量评价,表 1 给出了对

表 1 双线性插值与 FW 插值结果对比
 Tab. 1 The PSNR of bi-linear interpolation and FW interpolation

源图像	不同插值方式插值图像的峰值信噪比(dB)	
	双线性插值算法	FW 插值算法
Goldhill	27.18	29.13
Lena	28.30	32.46
Barbara	22.22	23.51
Boat	26.21	29.55
Baboon	21.10	22.47

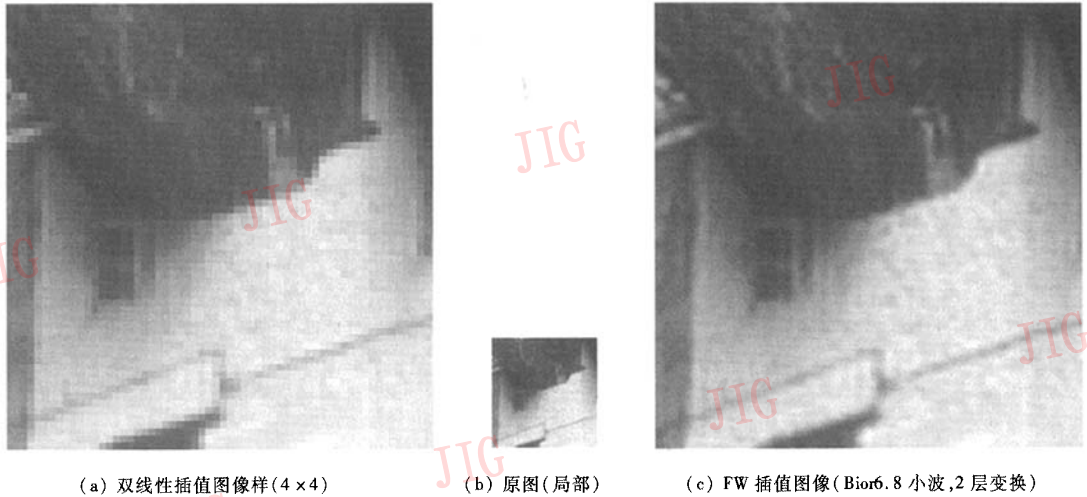


图 6 “Goldhill”插值后图像结果

Fig. 6 The result of FW interpolation on “Goldhill”

一组测试图像经 2×2 插值后图像的峰值信噪比,其中测试图像的尺寸均为 256×256 ,来自于原 512×512 标准测试图像的 Harr 下采样。

由表 1 可见,FW 插值的图像可获得比传统的双线性算法插值更高的峰值信噪比,这说明该算法插得的数据更加接近于原始真实图像的数据,这与图像的主观质量感受是一致的。

5 结 论

综上所述,基于 FW 编码的图像插值算法获得了比传统方案更加真实、精确的数据,其能够有效地对高分辨率图像进行预测,在医学、测绘等诸多领域内具有巨大的应用潜力。今后的研究目标应集中在缩短插值时间和提高插值精度两个方面。其中,插值时间的缩短应设法从加速 FW 编码入手,而提高插值精度则可以考虑通过与其他插值算法相融合来实现。

参考文献 (References)

1 Pentland A P. Fractal-based description of natural scenes[J]. IEEE

Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(6): 661 ~ 674.

2 Tian Yan, Tian Jin-wen, Liu Jian, et al. Implementation for super resolution—an improved image interpolation based on wavelet[J]. Journal of Image and Graphics, 2003, 8(12): 1422 ~ 1427. [田岩, 田金文, 柳健等. 超分辨率技术的实现——一种改善的小波插值方法[J]. 中国图象图形学报, 2003, 8(12): 1422 ~ 1427.]

3 Jacquin A E. Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1992, 1(1): 18 ~ 30.

4 Davis G. A wavelet-based analysis of fractal image compression[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(2): 141 ~ 154.

5 Demko S, Hodges L, Naylor B. Construction of fractal objects with iterated fuction systems [J]. Computer Graphics, 1985, 19(2): 271 ~ 278.

6 Chen Shou-jie, Zhang Li-ming. Fractal and Image Compression[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1998: 108 ~ 109. [陈守吉, 张立明. 分形与图像压缩[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1998: 108 ~ 109.]

7 Li Shui-gen. Fractal and Wavelet[M]. Beijing: Science Publishing House, 2004: 165 ~ 173. [李水根. 分形与小波[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 165 ~ 173.]

8 Coifman R R, Donoho D L. Translation-invariant Denoising[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995: 125 ~ 150.